управляем
предприятием

УПРАВЛЕНЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИЗМЕРЕНИЙ

Часть 3

Принципы обработки измерений

Андрей Мицкевич

К. э. н., доцент Высшей школы финансов и менеджмента РАНХиГС и Научно-исследовательского университета ВШЭ, руководитель консультационного бюро Института экономических стратегий, преподаватель ведущих бизнес-школ Москвы. Консультант, автор четырех книг и более чем 80-и статей, вышедших в последние годы, по контроллингу, мотивации, управленческому учету и сбалансированной системе показателей.

Есть ложь, есть наглая ложь и есть статистика.

Марк Твен

Различные измерения и показатели используются в каждой фирме, в любой организации. Выбор подходов к оценке степени достижения некоторого показателя (например, плана продаж) огромен. Задача этой статьи — не придумывать что-то свое, а попытаться классифицировать доминирующее большинство существующих подходов к измерению показателей.

Обработка результатов измерений используется для получения выводов. Хорошая обработка результатов измерений — это достоверная система оценок (термин квалиметрии, принятый нами на вооружение). А какими математическими свойствами она должна обладать? Есть ли общенаучный ответ на этот вопрос?

Один из возможных подходов к обработке результатов измерений статистический, на нем и концентрируется теория измерений.

Статистический подход — это получение различных средних, медиан, порядковых статистик, дисперсий, коэффициентов корреляции и прочих величин для подведения итогов и интерпретации результатов.

Статистические величины важны для практичеких аспектов системы показателей, и о них мы поговорим чуть ниже[1]. Начнем с математическо-статистической основы — она более значима для социологии, но и в менеджменте будет не лишней. Хотя бы потому, что социологические техники опросов присутствуют и в этой сфере.

[1] Другие методы обработки результатов измерений – более важные, критичные – будут представлены в следующих статьях-главах.

Теоретический минимум — допустимые операции

Использование чисел в жизни и хозяйственной деятельности людей отнюдь не всегда предполагает, что эти числа можно складывать и умножать, производить иные арифметические действия. Что бы вы, например, сказали о человеке, который занимается умножением телефонных номеров? В экспертизе, в управлении компанией применение чисел существенно более ограничено, чем принято в арифметике. Это явление в теории информации называется **ограничения на допустимые арифметические действия или допустимые операции.**

При анализе допустимых действий следует помнить о том, по какой шкале измерений получены исследуемые величины.

Общее правило допустимых преобразований: выводы, сделанные на основе данных, измеренных в шкале определенного типа, не должны меняться при допустимом преобразовании шкалы измерения этих данных.

Иначе говоря, выводы, сделанные на основе данных, измеренных в шкале определенного типа, не должны меняться при допустимом преобразовании шкалы измерения этих данных[2].

[2] На математическом языке это звучит так: алгоритм анализа данных должен быть инвариантен относительно допустимых преобразований, присущих шкале (задающих шкалу).

Пример. *Расстояния можно измерять в аршинах, метрах, микронах, милях, парсеках и других единицах измерения. Массу (вес) — в пудах, килограммах, фунтах и др. Переход от одной единицы измерений к другой выводов не меняет. Значит, это допустимые преобразования.*

Подчеркнем очень важное, хотя и вполне очевидное, обстоятельство: выбор показателей и единиц измерения зависит от исследователя, то есть субъективен. И здесь кроется корень возможных ошибок, вызванный абсолютным незнанием менеджерами теории информации.

Главная прикладная цель теории измерений (она же и главная проблема) — борьба с субъективизмом исследователя (в нашем случае менеджера и, в частности, разработчика системы показателей), когда он приписывает численные значения реальным объектам.

Причем здесь действует следующее общее правило:

Алгоритм, применимый к более слабой шкале, применим и к более сильной. Обратное неверно.

Напомним последовательность шкал, расположив их от более слабой к более сильной:

- номинальная шкала;
- порядковая или ранговая шкала;
- количественные шкалы: шкала интервалов, шкала степеней, шкала отношений, шкала разностей, абсолютная шкала.

Допустимые операции с величинами, измеренными по номинальной шкале.

Номинальная шкала сопоставляет каждый объект с определённым признаком, то есть описывает качественную информацию (характеристики, признаки объекта измерений). Какие операции возможны с качественными характеристиками?

1. **Нахождение частот распределения результатов измерений** по градациям шкалы в процентах или в натуральных единицах. Например, «доля квалифицированных специалистов — 78%».
2. **Определение моды** — значения (градации), встречающегося наиболее часто.
3. **Установление взаимосвязи между рядами качественных характеристик с помощью перекрестных таблиц.** Самым сильным способом количественного анализа результатов измерений по номинальной шкале является установление взаимосвязи между рядами качественных характеристик, расположенных неупорядоченно. С этой целью составляют перекрестные таблицы. Помимо простой процентовки, в таблицах перекрестной классификации можно подсчитать критерий сопряженности признаков по Пирсону: хи-квадрат (x^2). Это простейший показатель обоснованности вывода о наличии или отсутствии связи между сопоставляемыми характеристиками, то есть связанности качественных характеристик. Коэффициент Чупрова (Т-коэффициент) позволит по той же таблице определить напряженность связи, если хи-квадрат показывает, что связь имеет место.

Все эти операции, согласно общему правилу, применимы и к любой другой шкале.

Менеджер в шоке

Не пугайтесь — почти никто из менеджеров не знает, что такое хи-квадрат и прочие «ужасы» математической статистики. Но это «лечится» двумя «таблетками», принимаемыми одновременно:

- пригласить специалиста — это легко!
- увидеть проблему, не используя сопоставление качественных характеристик, значительно сложнее.

Если возникнут проблемы математики, то менеджер или постановщик системы показателей всегда сумеет найти нужных специалистов. Вот только пока таких затруднений в большинстве компаний не зафиксировано. Почему? Ответ прост: потому что менеджеры просто над этим не задумываются. Менеджеры не видят того, чего не понимают. Мой опыт показывает, что менеджеры не замечают и явных логических нестыковок. Даже при разработке системы показателей. Причина очевидна: не хватает специальной математической подготовки и экономических знаний. А ведь именно из-за этого появляются показатели типа «средняя температура по больнице».

Допустимые операции с величинами, измеренными по порядковой (ранговой) шкале. Порядковые шкалы учитывают, к какой категории принадлежит та или иная измеряемая характеристика объекта и в каком отношении она находится с характеристиками других объектов. Результат измерений по порядковой шкале выражается числами 1, 2, 3,..., но с этими числами нельзя делать привычные арифметические операции. Например, в арифметике 1 + 2 = 3, но в ранговой шкале нельзя утверждать, что для объекта, стоящем на третьем месте, интенсивность изучаемой характеристики равна сумме интенсивностей объектов с рангами 1 и 2.

Менеджеры при разработке системы показателей, как правило, не замечают явных логических нестыковок. Причина очевидна: не хватает специальной математической подготовки и экономических знаний.

Пример. *Один из видов оценивания по порядковой шкале — оценки учащихся. Вряд ли кто-то будет утверждать, что знания отличника равны сумме знаний двоечника и троечника (хотя 5 = 2 + 3), хорошист соответствует двум двоечникам (2 + 2 = 4), а между отличником и троечником такая же разница, как между хорошистом и двоечником (5 — 3 = 4 — 2).*

Очевидно, что для анализа качественных данных (измерений по ранговой шкале) необходима не всем известная арифметика, а другая система действий, дающая базу для разработки, изучения и применения корректных систем показателей. Мы уже видим, что некоторые действия некорректны в порядковой (ранговой) шкале. Какие же действия корректны? **В порядковых шкалах допустимы:**

- **сравнения типа лучше — хуже, важнее, справедливее и т. п.**
- **установление взаимосвязи между величинами с помощью коэффициентов ранговых корреляций.**

Допустимые операции с величинами, измеренными по количественным шкалам. Это самая привычная нам ситуация: в количественных шкалах осмысленными, логически допустимыми являются действия сложения и вычитания. Очевидно, что и сравнения больше — меньше тоже допустимы.

Использование средних величин

Все статистические показатели требуют использовать те или иные операции над измеренными величинами. Тогда какие из показателей можно использовать для характеристики измерений по разным шкалам?

Очевидно, что статистические выводы могут быть адекватны реальности только тогда, когда они не зависят от того, какую единицу измерения предпочтет менеджер и разработчик системы показателей (то есть когда эти выводы инвариантны относительно допустимого преобразования шкалы). Оказывается, сформулированное условие является достаточно сильным требованием и из многих привычных алгоритмов анализа данных ему удовлетворяют лишь некоторые. Покажем это на примере анализа корректности использования самой популярной статистики — средних величин — для измерений в разных шкалах.

Для чего в экономике используются средние величины? Обычно для того, чтобы заменить совокупность результатов измерений одним числом и затем получить возможность сравнивать эти числа. Зададимся вопросом: а что такое среднее? Ответ прост. Допустим, есть результаты некоторого процесса (по дням, например). В среднем — это значит, что если подставить это «среднее» вместо каждого ежедневного значения, то итоговый за месяц результат процесса не изменится.

Виды средних величин. Существуют различные виды средних величин:

- среднее арифметическое;
- средневзвешенное (среднее арифметическое взвешенное);
- медиана;
- мода;
- среднее геометрическое;
- среднее гармоническое;
- среднее квадратическое.

Замечу, что среднее арифметическое и средневзвешенное формально очень похожи, но на бытовом уровне люди иногда путают их (см. врезку «Вероятность встретить динозавра на Невском проспекте»).

Определение средних величин

Приведем строгие формулировки для основных средних величин. Пусть $x_1, x_2,..., x_n$ — показатели некоторой величины количеством n.

Среднее арифметическое — это средний уровень изучаемой величины:

$$x = (x_1+x_2+...x_n)/n = \sum x_1/n$$

Наряду с простым средним арифметическим применяют и среднее арифметическое взвешенное. Его используют, когда, к примеру, значения вариантов встречаются по нескольку раз или каждое значение ряда имеет какой-то определенный индивидуальный вес.

Среднее арифметическое взвешенное — это оценка среднего с учетом весов величин:

$$x = \sum x_1 w_i \,/\, \sum w_i \text{ , где } w_i \text{ — вес величины.}$$

Вероятность встретить динозавра на Невском проспекте

На тему различия среднего арифметического и средневзвешенного есть довольно старый, но замечательный анекдот: «Блондинку спрашивают: Какова вероятность встретить динозавра на Невском проспекте?» — «50%. Либо я его встречу, либо нет».

Среднее геометрическое нескольких положительных вещественных чисел — это такое число, которым можно заменить каждое из данных чисел, чтобы их произведение не изменилось:

$$G(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n}$$

Среднее гармоническое — это число (y), обратное которому есть арифметическое среднее чисел, обратных данным числам

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n): \; y = n : (1/a_1 + 1/a_2 + \ldots + 1/a_n)$$

Среднее квадратическое (квадратичное) — число s, равное квадратному корню из среднего арифметического квадратов данных неотрицательных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$:

$$s = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}} \qquad (3)$$

Среднее квадратическое — частный случай среднего степенного и потому подчиняется неравенству о средних. В частности, для любых чисел оно не меньше среднего арифметического:

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \leqslant \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}} \qquad (4)$$

Средние величины по Колмогорову для чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ вычисляются по формуле

$$G\{(F(x_1) + F(x_2) + \ldots F(x_n)) / n\}, \qquad (1)$$

где F — строго монотонная функция (то есть строго возрастающая или строго убывающая), G — функция, обратная к F. Среди средних по Колмогорову — много хорошо известных персонажей $(x > 0)$:

- если $F(x) = x$, то среднее по Колмогорову — это среднее арифметическое;
- если $F(x) = \ln x$, то среднее по Колмогорову — это среднее геометрическое;
- если $F(x) = 1/x$, то среднее по Колмогорову — это среднее гармоническое;
- если $F(x) = x^2$, то среднее по Колмогорову — это среднее квадратическое.

Кроме перечисленных средних, для относительной характеристики величины и внутреннего строения ее показателей пользуются так называемыми структурными средними, которые представлены, в основном, модой и медианой.

Медиана — это такое значение величины, которое делит все показатели пополам. Если размерность выборки нечетная $(N = 2n+1)$, то медианой является $(n+1)$-й элемент выборки. Если размерность выборки четная $(N = 2n)$, то медианой строго говоря является любое число, лежащее между n-м и $(n+1)$-й элементами выборки, включая эти элементы, которые иногда называют левой и правой медианами. В экономической статистике чаще всего в качестве медианы используется среднее значение между n-м и $(n+1)$-м элементами выборки.

Мода — это наиболее часто встречающееся значение величины.

В разных случаях необходимо использовать различные средние величины. Чаще всего для оценки среднего значения используют среднее арифметическое. Его применение настолько привычно, что второе слово в термине часто опускают. И говорят о средней зарплате, среднем доходе и других средних для конкретных экономических данных, подразумевая под «средним» именно среднее арифметическое. Но не всегда среднее арифметическое подходит для оценок (см. врезку «Расчет среднегодовой инфляции»).

Перечень допустимых операций, а также статистических показателей в разных шкалах сведен в таблице 3.

Таблица 3. Характеристики шкал и допустимых операций.

Тип шкалы	Отношения между шкальными значениями	Наличие нуля и единиц измерения	Допустимые преобразования шкалы (операции)	Допустимые статистические показатели
Номинальная шкала	Тождественно — нетождественно	Нет нуля, нет единиц измерения	Установление взаимооднозначных соответствий	Процент, доля, мода, а также тетрахорические и полихорические коэффициенты корреляции
Порядковая (ранговая) шкала	Есть иерархия признаков, сравнение, отношение неравенства. Больше — меньше, равно — не равно.	Нет нуля, нет единиц измерения	Те, которые сохраненяют порядок	Процент, доля, мода, медиана. Коэффициенты ранговой корреляции
Интервальная шкала	Равенство - неравенство, больше - меньше, больше на…, меньше на…. Отношения между интервалами.	Условный ноль, есть единицы измерения	Можно менять единицу измерения и условный ноль	Процент, доля, мода, медиана, среднее арифметическое, дисперсия, среднеквадратическое отклонение. Классические методы корреляции
Шкала отношений	Равенство — неравенство, больше — меньше, больше в..., меньше в....	Абсолютный ноль, есть единицы измерения	Можно менять единицы измерения, ноль переносить нельзя	Процент, доля, мода, медиана, среднее арифметическое, дисперсия, среднеквадратическое отклонение. Классические методы корреляции

Расчет среднегодовой инфляции

Какое среднее отражает среднегодовую инфляцию? Определим среднегодовую инфляцию, если годовые инфляции за 4 года были такими, как указаны в таблице.

Год	1	2	3	4
Инфляция	60 %	300 %	56,25 %	60 %

Для расчета применим индексную технику. За 4 года индекс роста цен составил 1,6 х 4 х 1,5625 х 1,6 = 16. Среднегодовой индекс роста цен (x) вычисляется по формуле среднего геометрического[3]. Так как $(1+x)^4$ должно давать 16, следовательно $(1+x) = 2$, а $x = 1$. То есть инфляция — показатель прироста — равна 100 %. Поэтому среднегодовая инфляция составит 100%.

При этом среднее арифметическое — 119,06 % — не дает правильный показатель среднегодовой инфляции: $(1 + 1{,}1906)^4 = 23{,}03$. Увы, но более 50 % слушателей программ General MBA считают среднегодовую инфляцию равной 119,06 %.

[3] Среднегеометрическая величина дает возможность сохранять в неизменном виде не сумму, а произведение индивидуальных значений данной величины, что как раз и необходимо для расчета инфляции.

***

В этой части статьи мы описали теорию и принципы обработки результатов измерений. Вроде бы все это известно. Но дело в том, что ошибки при выводах, сделанных на основе средних величин, в порядковых шкалах случались не раз. В следующей части статьи мы проанализируем наиболее распространенные ошибки.